

OM SIMULTANITET I EKONOMISKA MODELLER*

Av RAGNAR BENTZEL och BENT HANSEN

1. PROBLEMET

För tio år sedan offentliggjordes i *Econometrica* en artikel, som väckte stor uppmärksamhet och gav impulsen till en livlig, ännu inte avslutad diskussion om ekonometrisk metodik. Artikeln, vars författare var Haavelmo¹, blev en brandfackla; i främsta rummet därför att den bildade utgångspunkten för en stark kritik mot användandet av den ordinära regressionsmetoden, vilken dittills mer eller mindre allmänt betraktats som ekonometriens standardmetod. Haavelmo framlade en ny princip för uppskattningsförfarandet vid ekonometriska undersökningar. Av denna princip följer, att regressionsmetoden icke är användbar i de fall, då de ekonomiska modeller man laborerar med är av s. k. simultan typ. Den måste då ersättas med ett annat och mer komplicerat förfaringssätt. Det är just den ev. förekommande simultaniteten, som här vållar komplikationer.

Den diskussion, som föjde efter Haavelmos nämnda arbete, har i huvudsak gällt de konsekvenser hans resultat får för den rent statistiska arbetsmetodiken. Den ekonomiskt primära frågan, om man verkligen har anledning att laborera med ekvationssystem av simultan typ, har däremot berörts mera sporadiskt och — det kan sägas utan överdrift — tämligen ytligt. Att simultanitet förekommer i de ekonomiska relationerna har under hänvisning till jämviktssystem av vanligt slag (Cournot, Walras, Keynes etc.) oftast betraktats såsom självklart.² Detta förhål-

* Erik Lindahl och Trygve Haavelmo har läst utkast till denna artikel. Deras påpekanden av olika brister har gett oss anledning till åtskilliga ändringar i framställningen.

¹ T. Haavelmo, "The Statistical Implications of a System of Simultaneous Equations", *Econometrica* 11 (1943), p. 1—12.

² Se. t. ex. L. R. Klein, *Economic Fluctuations in the United States 1921—1941*, London & New York 1950, Ch. 1.

lande förefaller i själva verket förvånande. Förekomst av simultanitet i dynamiska ekonomiska modeller kan, åtminstone enligt vår uppfattning, långtifrån betraktas som en självklarhet och hela frågan om bärkraften i kritiken mot regressionsmetoden hänger just på hur därmed förhåller sig.

Herman Wold har i sin nyutkomna *Demand Analysis* granskat frågan om simultanitet kontra icke-simultanitet i ekonomiska modeller. Han kommer där till det resultatet, att de ekonomiska relationerna som regel icke är av simultan utan i stället av s. k. rekursiv typ, varigenom den nyssnämnda kritiken mot den ordinära regressionsmetoden skulle vara utan större relevans. Wold ställer sig skeptiskt till det simultana betraktelsesättet och fasthåller vid att regressionsmetoden är »essentially sound». ^{1 2}

Det problem, som Wold nu tagit upp till diskussion är utan tvekan betydelsefullt. I föreliggande artikel skall vi försöka att lämna ett ytterligare bidrag till denna diskussion. Vår frågeställning skall helt kort formuleras sålunda: Har man vid praktiskt ekonometriskt arbete någonsin anledning att betrakta ekvationssystem av simultan typ och, om så är fallet, vad är det då för omständigheter som leder fram till ett sådant betraktelsesätt. ³

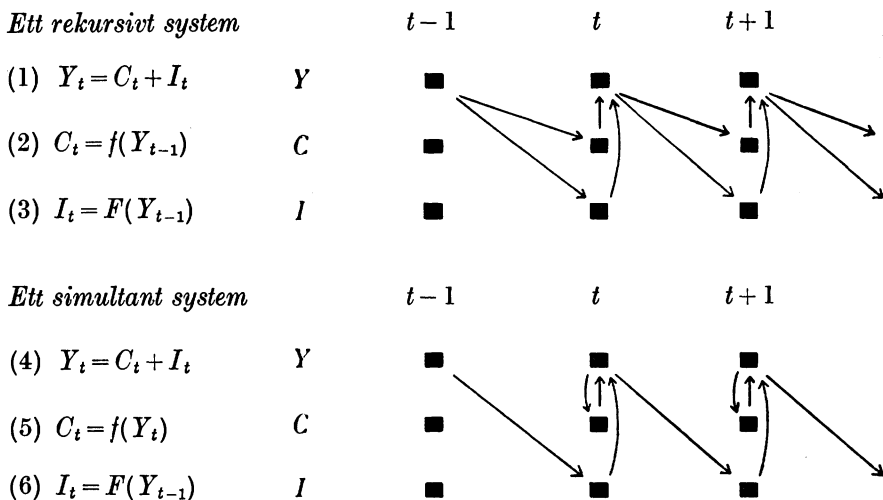
2. REKURSIVA OCH SIMULTANA SYSTEM

För att komma fram till det centrala i problematiken kan det vara på sin plats att först antyda skillnaden mellan den simultana och den rekursiva modelltypen. Denna skillnad framgår måhända klarast av två enkla exempel, illustrerade med Tinbergens »arrow scheme». Betrakta nedanstående två modeller, som vardera innehåller tre variabler: nationalinkomst Y , konsumtion C samt investering I , alla tidsdaterade. Innebörden av relationerna torde icke fordra någon vidare förklaring.

¹ H. Wold in ass. with L. Jureen, *Demand Analysis, A Study in Econometrics*, Stockholm & New York 1952, Part I, spec. Ch. 2. Se i övrigt vår recension av boken på annan plats i denna tidskrift.

² Det bör observeras, att kritiken mot regressionsmetoden inte gäller alla tillämpningar av densamma. Jämför vår diskussion om »the meteorological» och »the engineering type» i vår recension av Wolds *Demand Analysis* på annat ställe i denna tidskrift.

³ När vi ställer detta problem, innebär det ingalunda något ifrågasättande av det formellt korrekta i Haavelmos principiella synpunkter. Däremot synes inga vägande invändningar kunna göras. Vår fråga gäller endast i vilken utsträckning Haavelmos synpunkter får praktiska konsekvenser i ekonometrien.



Båda dessa modeller är dynamiska och förklarar förlopp i tiden. Den principiella skillnaden dem emellan framgår av vidstående pilschema. Medan pilarna för den rekursiva modellen alla är »enkelriktade», således att alla samband mellan två storheter är ensidiga, är i det simultana systemet förbindelsen på en punkt, nämligen mellan Y och C , dubbelsidig. Mellan dessa två variabler finns två pilar; två samband. Allmänt kan sägas, att om det emellan två eller flera storheter med samma tidsdatering finnes ett »dubbelriktat» samband, är systemet simultant; i annat fall är det rekursivt.¹ Det bör observeras, att ordet simultanitet här används i en speciell teknisk mening. Simultanitet är sålunda ett begrepp, som inte är identiskt med samtidighet.

Olikheten mellan de två ovan betraktade modellerna kan kanske synas oväsentlig, men för den ekonometriska uppskattningsmetodiken är den av stor betydelse. Under de antaganden, som vanligen brukar göras, kan man nämligen uppskatta parametrarna i det rekursiva systemet med hjälp av ordinär regressionsmetod, medan denna — därom är alla ense — icke kan användas, när det gäller det simultana systemet. Detta sistnämnda fordrar betydligt mer komplicerade och arbetskrävande metoder. Frågan om regressionsanalysens användbarhet inom

¹ En mera precis formulering finns hos Wold a. a. p. 49 f. f. För Wold är rekursivitet f. ö. inte endast en formell matematisk egenskap hos systemet utan även en ekonomisk, så till vida som han fordrar, att ett system för att kallas rekursivt även måste tillåta en kausal tolkning. Denna fordran skall vi dock icke upprätthålla i det följande.

ekonometrien blir på detta sätt av *ekonomisk* och icke enbart av statistisk natur. Allt beror på om de modeller, som ekonomerna konstruerar och önskar testade, är simultana eller rekursiva, och huruvida detta är fallet eller ej beror helt och hållet på den bakomliggande ekonomiska teorien. Naturligtvis är det denna teori, som skall bestämma det statistiska förfarandet och icke tvärt om.

Man får alltså ställa sig den frågan, om det i den ekonomiska teorien finns några skäl, som a priori talar för simultanitet eller rekursivitet i dynamiska modeller. Förespråkarna för kritiken mot regressionsmetoden — i främsta rummet forskarstaben kring Cowles Commission — menar, såvitt vi förstår, att de ekonomiska sammanhangen generellt är av simultan natur.¹ Som tidigare nämnts ger man emellertid knappast argument för denna uppfattning. Wold å sin sida menar, att den ekonomiska teoriens relationer alltid är »kausala» och att detta är ett aprioristiskt skäl för att man endast skall behöva arbeta med rekursiva system. Dessa möjliggör nämligen en rent kausal tolkning av det ekonomiska förloppet, vilket däremot de simultana modellerna *icke* gör.² Wold hänvisar därvid bl. a. till stockholmsskolans sekvensanalys, där just rekursiva modeller förekommer.

Det är nu vår uppfattning, att det problem det här gäller, icke kan avfärdas så enkelt som man gjort inom Cowles Commission, men att icke heller Wolds diskussion är uttömmande. För att nå resultat i denna konflikt synes det vara nödvändigt att gå tillbaka till själva den dynamiska teoriens elementa. Vår grundtanke är därvid, att man måste skilja mellan vad vi i det följande skall kalla *originära* resp. *härledda* modeller. Med en originär modell skall vi därvid mena en i alla avseenden — för varje ekonomiskt subjekt och för varje nyttighet — fullständig och explicit angiven modell. Såsom härledd skall vi däremot beteckna den modell, som erhållits ur en originär genom en sådan sammandragning (komprimering), att den icke redovisar alla den originära modellens variabler och/eller samband explicit. Den originära modellen blir på

¹ Denna åsikt kommer klart fram hos Marschak: "Thus economic data are generated by systems of relations that are, in general, stochastic, dynamic and simultaneous" (*Statistical Inference in Dynamic Models*, Ed. by T. C. Koopmans with an introduction by J. Marschak, New York & London 1950, p. 3). En liknande uppfattning framkommer bl. a. i L. R. Klein a. a. p. 2.

² Wold a. a. p. 50 ff.

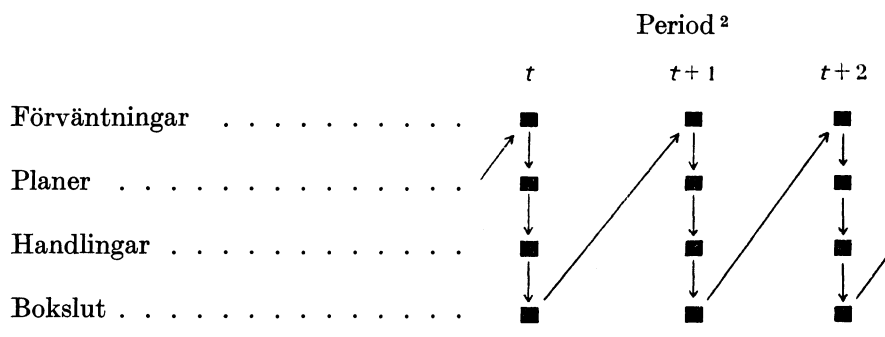
detta sätt fundamental och »ren» i motsats till den härledda i den meningen, att den sistnämnda alltid har (eller bör ha) en originär modell som utgångspunkt.

3. STOCKHOLMSSKOLANS »DISEQUILIBRIUM» ANALYS

Låt oss först betrakta stockholmsskolans periodanalys. Den s. k. »disequilibrium»-metoden¹ där är så upplagd, att den ger möjlighet till uppställandet av originära modeller. I korthet är tankegången följande:

Det ekonomiska förloppet bestäms av de enskilda subjektens försök att realisera sina planer. Dessa är i sin tur bestämda av förväntningarna om framtiden. Förväntningarna själva beror på det tidigare faktiska förloppet (samt ev. externa påverkningar) och revideras därför efter hand. Eftersom alla de ekonomiska subjektens planer som regel inte är förenliga, kan de inte alla realiseras, varför planerade och realiserade storheter för den enskilda individen inte behöver överensstämma. Härav följer nödvändigheten att arbeta med storheter såväl *ex ante* som *ex post* i förklarings-schemat. Alla förändringar i planer eller förväntningar tänkes ske i övergången mellan två perioder medan alltså inga sådana förändringar äger rum *under* perioden. På detta sätt blir således periodindelningen definitionsmässigt bestämd genom de tidpunkter, då planer och förväntningar revideras.

Denna stockholmsskolans tankegång kan på följande sätt illustreras genom ett pilschema av liknande typ, som de ovan angivna:



¹ E. Lindahl, *Studies in the Theory of Money and Capital*, London 1939, Part I, se spec. p. 60 ff.

² Observera att t här betecknar ett tidsintervall. Sambanden inom varje period kan därför mycket väl vara utsträckt över tiden.

Som ytterligare illustration till detta analyschema och som en bakgrund till det följande kan det vara på sin plats att ge en explicit ekonomisk modell, som följer detta schema. Det är härvid endast fråga om att belysa det karakteristiska i »disequilibrium»-metoden.

Låt oss först betrakta en relation, som säger hur inkomstförväntningarna bestämmas, och därvid anta, att den förväntade inkomsten är en linjär funktion av föregående års inkomst. Om vi använder samma beteckningar som tidigare och låter en variabel med apostrof beteckna storheten *ex ante*, medan samma variabel utan apostrof betecknar motsvarande storhet *ex post*, får vi följande relation:

$$(7) \quad Y'_t = a_1 \cdot Y_{t-1} + a_2.$$

På grund av dessa inkomstförväntningar antages nu konsumenterna planera sin konsumtion i enlighet med ekvationen

$$(8) \quad C'_t = b_1 \cdot Y'_t + b_2.$$

Den planerade investeringen skall vi också tänka oss bestämd av den faktiska inkomsten en period tillbaka i tiden:

$$(9) \quad I'_t = c_1 \cdot Y_{t-1} + c_2.$$

Slutligen skall vi förutsätta, att såväl konsumenter som investerare genomför sina planer, varigenom vi får

$$(10) \quad C_t = C'_t \text{ samt}$$

$$(11) \quad I_t = I'_t.$$

Nationalinkomsten *ex post* låter sig därefter bestämmas ur identiteten

$$(12) \quad Y_t = C_t + I_t.$$

Härigenom blir alla betraktade variabler bestämda för tidsperioden *t* och variabelvärdena för perioden *t + 1* kan nu bestämmas genom samma system¹, d. v. s.

$$Y'_{t+1} = a_1 \cdot Y_t + a_2 \text{ etc.}$$

På detta sättet är det då möjligt att räkna sig fram period efter period.

Det råder ingen tvekan om att »disequilibrium»-metodens förlopps-schema är tänkt som rekursivt. Detta framgår klart av de arbeten,

¹ Om inte själva relationerna ändras p. g. a. ev. felslagna förväntningar i föregående period, vilket ju mycket väl kan tänkas. Denna komplikation bortser vi dock ifrån.

som utgivits av stockholmskolans representanter.¹ Det är just denna rekursiva natur vi sökt att illustrera genom ovanstående pilschema samt ekvationssystem. Det synes oss å andra sidan ingenstans vara bevisat, att simultanitet icke kan tänkas förekomma i denna typ av dynamisk analys. Vi skall därför här nedan gå in på denna fråga och försöka visa, att rekursivitet alltid kan upprätthållas om man arbetar med originära modeller, där varje enskild plan redovisas i systemet.

4. ORIGINÄRA MODELLER

Låt oss betrakta en *originär* modell baserad på nyssnämnda »dis-equilibrium»-metod. I denna är definitionsmässigt alla de enskilda ekonomiska subjektens planer specificerade i detalj. I en sådan modell kan uppenbarligen förekomma avhängighetsförhållanden mellan de olika subjektens planer samt emellan de olika handlingarna under en och samma enhetsperiod. Det ligger nära till hands, att fråga sig, om inte dylika avhängighetsförhållanden skulle kunna medföra simultanitet i modellen. Hur därmed förhåller sig skall vi nu försöka att undersöka.

För att klarlägga karaktären av de intraperiodiska avhängighetsförhållandena synes det vara lämpligt att skilja mellan betingade och obetingade planer.² Med de förra skall vi mena planer, som är betingade av (funktioner av) en eller flera framtida händelser inom samma period (andras prissättning etc.). När dessa händelser har ägt rum blir den betingade planen obetingad och först då kan den ge utslag i handlande. Som ett exempel på en betingad plan kan man välja en efterfrågekurva: när priset fastställts blir planen obetingad — den motsvarar då en *punkt* på efterfrågekurvan — och ett köp kan därefter äga rum.

Det må nu först erinras om, att själva periodavgränsningen innebär, att om en persons planer först är fastlagda (de må vara antingen betingade eller obetingade), ändras de ej heller under perioden. Att en betingad plan under perioden efter hand blir obetingad och kan resultera i ett handlande, betyder inte att planen *förändras*. Det betyder endast, att den fixeras. En förändring av en plan kan endast ske

¹ Dag Hammarskjöld, *Konjunkturspridningen*, Stockholm 1933, S. O. U. 1933:29, p. 53 ff.; Erik Lundberg, *Studies in the Theory of Economic Expansion*, Stockholm 1937, spec. Ch. IX.

² Denna distinktion svarar, om än icke helt formellt så dock i sak, till Lindahls distinktion mellan »conditioned» och »unconditioned plans», se Lindahl a. a. p. 45.

genom att något oförutsett inträffar, varvid grunderna för planerandet blir olika mot tidigare. Om så sker, har därmed emellertid perioden enligt sin definition gått till ända. Man förutsätter ju, att alla förändringar av planen äger rum i övergången mellan två tidsperioder.

Med användande av ovannämnda terminologi kan man då säga, att vid övergången mellan två perioder de ekonomiska subjekten lägger upp nya planer, vissa betingade, andra obetingade. De obetingade planerna resultera i handlande (exempelvis prisnoteringar) omedelbart efter den nya periodens inträde. Härigenom bli de tidigare betingade planerna mindre betingade eller t. o. m. obetingade. I det senare fallet kan de leda till nytt handlande o. s. v. i en lång kedjereaktion, som utspelas inom periodens ram. På detta sätt se vi, att planerna och därmed handlandet även *inom* en period icke är oberoende av varandra. Kan denna avhängighet ge anledning till att simultanitet uppstår inom perioden?

Låt oss först betrakta det (i stor utsträckning faktiskt förekommande) fallet, där en individ (handlingsenhet) på samma tidpunkt fastställer en rad olika planer och handlingar. Detta synes nämligen omedelbart leda till simultanitet inom perioden. Tag ett hushålls planering för och köp av alla sina konsumtionsnyttigheter under en period. Enligt vanlig konsumtionsteori — som ju kan tolkas som en teori om hur bestämda inkomstförväntningar leder till uppställandet av betingade planer för konsumtionsköpen under en period (evt. under flera perioder vid intertemporal konsumtionsteori) — fås genom nyttomaximeringsförfarandet de välkända relationerna $U_{x'_i}/U_{x'_n} = p_i/p_n$ och $\sum x'_i \cdot p_i = y'$.¹ Här har vi tydligen de planerade konsumtionsvaruköpen bestämda såsom funktioner av periodens (ännu kanske icke kända) priser samt av den förväntade inkomsten. Detta ekvationssystem är simultant i Haavelmos mening. Emellertid måste det erinras om, att vad vi i den ekonomiska teorin är intresserade av icke är de ovan anförda relationerna i sig själva, men däremot de s. k. efterfrågefunktionerna, som framkommer genom att ur det simultana ekvationssystemet lösa ut x'_i 'na. Därvid fås funktioner av typen $x'_i = f_i(p_1, \dots, p_n, y')$, och i denna form ha

¹ x'_i resp. p_i betecknar planerat köp (mängd) av resp. faktiskt pris för konsumtionsnyttigheten no. i ; y' är förväntad inkomst och $U_{x'_i}$ nyttofunktionens partiella derivata m. a. p. x'_i .

vi de (i och för sig simultant bestämda) betingade köpplanerna (efterfrågefunktionerna) på rekursiv form.¹ — En ganska likartad argumentering gäller för företagets och ev. andra ekonomiska subjekts planering av olika samtidiga handlingar. Vi kan således konstatera, att det faktum att varje enskilt ekonomiskt subjekt som regel fastställer en hel rad olika planer samtidigt för varje period, inte leder till simultanitet i den dynamiska modellen.

Vi kommer nu till den andra, icke mindre viktiga, frågan, om det är uteslutet, att simultanitet kan uppstå i ett originärt system genom att två eller flera ekonomiska subjekt låter sitt handlande vara bestämt av den eller de andras samtidiga handlande. Kan man tänka sig, att personen A:s planer är betingade av B:s handlande samtidigt som B:s planer är betingade av A:s handlande? Låt oss för att välja ett exempel på en dylik situation tänka oss ett handelsföretag, där det finns dels en försäljningschef dels en inköpschef. Det är då inte orimligt, att de båda herrarna (efter överenskommelse) fastställer försäljningspris resp. varuinköp på exakt samma tidpunkt och på ett sådant sätt, att ju högre försäljningspriset sättes desto mindre är varuinköpet och omvänt. I detta fall skulle man kunna säga, att ett visst ömsesidigt beroende mellan de båda herrarnas samtidiga planer och handlingar förekommer. Det inses emellertid, att denna simultanitet uppkommer blott därigenom, att en autonom handlingsenhet, företaget, har splittats upp i två enheter, försäljningschef och inköpschef. Kombinerar dessa två herrar till en enhet, företaget, som inom ekonomisk teori brukar göras, förklaras både pris och inköpt mängd av företagets tidigare erfarenheter o. d. i en rad icke-simultana uttryck, jmf. ovan. Simultaniteten uppkommer enbart genom den konstlade uppdelningen av en handlingsenhet i två.

Låt oss nu övergå till att betrakta ett annat fall, som har vissa beröringspunkter med det föregående. Det är en icke ovanlig tanke, att varje köp, som ju alltid *samtidigt* innebär en utgift för köparen och en intäkt för säljaren, skulle förorsaka ett ömsesidigt beroendeförhållande mellan variabler, som inverkar på det ekonomiska förloppet.

¹ De individuella efterfrågefunktionerna är alltså i själva verket en »reduced form», vilket nog är värt att uppmärksamma på bakgrund av Wolds kritik av »reduced form»-metoden.

Enligt vår uppfattning är emellertid ett sådant argument icke hållbart. Visserligen kan man säga, att fullständig samtidighet här föreligger, men någon tendens till simultanitet mellan variablerna medför detta icke. Vad som händer vid ett köp är ju, att köparen (ev. säljaren) realiserar en köpplan, samt möjligen att säljarens tidigare betingade planer blir obetingade. På annat sätt kan det inte påverka säljarens handlingar under ifrågavarande enhetsperiod ty enligt denna sistnämndas definition kan ju inga planer förändras under perioden. Först efter det att säljaren gjort bokslut, kan köpet komma att som konsekvens få en förändring av säljarens planer. Bokslutet kan emellertid inte äga rum förrän efter det att köpet skett. Det är således exempelvis meningslöst att säga att köpet har en omedelbar effekt på säljarens inkomst, ty denna senare bestämmes inte förrän vid bokslutet och alltså inte förrän vid periodens slut.

Över huvud taget är det inte möjligt för oss att förstå, hur två individer skulle vara i stånd att handla tidsmässigt samtidigt och inbördes beroende, utan att något avtal föreligger dem emellan. Under fri konkurrens, då inga avtal ingås, torde därför all simultanitet vara utesluten vid dynamisk analys i form av en originär modell i Stockholmskolans »disequilibrium»-analys. Handlar således två personer under fri konkurrens verkligen tidsmässigt samtidigt och inbördes beroende av varandra, måste de alltså på grund av den fria konkurrensens definition i själva verket utgöra en enda handlingsenhet. Och tillhör de samma handlingsenhet kan deras ev. planering av en rad samtidiga handlingar ej ge anledning till simultanitet, som vi ovan visat. Vad som, slutligen, sker mellan personer inom samma handlingsenhet faller utanför nationalekonomiens intressesfär.

Men hur är förhållandet, om man ej har ren frikonkurrens, om exempelvis vissa priser noteras efter samråd mellan olika parter med gemensamma intressen? Kan vi då ej tvingas uppfatta ett sådant pris som bestämmande något jämviktsförhållande mellan de olika parter, som har med prisnoteringen att göra? Eller om två företagare, som säljer var sin vara, kommer överens om att sätta bestämda priser på dessa varor, blir då icke de två priserna avhängiga av varandra i ett simultant system? Icke nödvändigtvis: antingen kan man uppfatta de förhandlande parterna som en handlingsenhet just inom detta speciella

område, eller också får man draga in själva det »förhandlingsförlopp», vid vilket man kommer till enighet om prissättningen, i den ekonomiska modellen. I bägge fallen försvinner simultaniteten, så att systemet förblir rekursivt.¹ Vilken av dessa två utvägar man väljer beror naturligtvis på, vad man i det konkreta fallet önskar få förklarad inom modellens ram. Det bör dock understrykas, att vill man på detta sätt driva »disequilibrium»-metoden till sin spets, så att rekursiviteten bevaras, kan man tvingas arbeta med mycket korta perioder.

Det är naturligtvis vanskligt att veta, om man har tagit hänsyn till alla i den ekonomiska teorien tänkbara förhållanden, som skulle kunna leda till simultanitet — Balder glömde ju misteln. Så vitt vi kan se, finnes det emellertid i den ekonomiska teorien² inga omständigheter, som ställer hinder i vägen för den slutsatsen, att om man går ned till en på lämpligt sätt specificerad modell med tillräckligt kort period, d. v. s. en originär modell konstruerad på grundval av Stockholmskolans »disequilibrium»-metod, så kan modellen härigenom alltid göras rekursiv. På detta sätt kommer simultanitet i Haavelmos mening alltid principiellt att kunna undgås.

5. HÄRLEDDA MODELLER

A. Ovan har vi kommit till den slutsatsen, att simultanitet alltid kan undvikas vid den typ av ekonomisk förloppsanalys, som baseras på originära »disequilibrium»-modeller. Man kan då fråga sig om simultanitet över huvud taget behöver förekomma i ekonomiska modeller. För att på grundval av slutsatsen ovan kunna svara nekande på denna fråga, skulle man tvingas påstå, att all ekonomisk teori bör uttryckas i form av originära modeller baserade på »disequilibrium»-metodens schema. Ett sådant påstående skulle naturligtvis vara orimligt. Det är ju endast den mycket abstrakta dynamiska teorien, som kan vara av denna typ. Den vanligen förekommande dynamiska teorien består, som vi alla vet,

¹ Det förstås utan vidare att perioddefinitionen i sig själv utesluter, att successiva jämviktsanpassningar sker inom perioden, varför all simultanitet i form av jämviktsvillkor kan lämnas ur räkningen. Därav som ovan anförts namnet »disequilibrium»-metoden.

² Här rör det sig bara om det ekonomiska livet. Vi känner oss på inget sätt kompetenta att gå in i en allmän diskussion av det krångliga filosofiska problemet om simultana orsakssamband överhuvudtaget kan tänkas i dynamisk teori. Det skulle vara av stort intresse att få undersökt om man inom andra vetenskaper arbetar med simultanitet i Haavelmos mening.

icke av originära utan av *härledda* modeller. Man använder sig ju där av makrostorheter, ofta gällande förhållandevis långa tidsperioder, samtidigt som man stundom underlåter att skilja mellan *ex ante* och *ex post*. Särskilt gäller detta de teorier, som är av relevans för ekonometrien. Där kan man inte underlåta att taga hänsyn till det förekommande statistiska materialets beskaffenhet. Modellerna måste därför som regel gälla vissa fixerade tidsperioder (år, kvartal etc.). Vidare måste så gott som undantagslöst de *explicita* variablerna inskränkas till att avse endast storheter *ex post*. Det synes i själva verket vara dessa två omständigheter, bristen på empiriska uppgifter om *ex ante* variablernas värden samt tvånget till eller önskan om aggregation, som gör att ekonometrien i vissa fall har anledning att betrakta ekvationssystem av simultan typ. För att närmare klargöra hur och när simultanitet kan uppkomma i dessa fall, skall vi nedan visa några typexempel därpå.

B. Som motivering för att de simultana modellerna skulle vara de så att säga naturliga hänvisas stundom i vaga ordalag till Walras' (Cournots, Keynes') jämviktssystem.¹ Detta karakteriseras ju just av simultana samband mellan alla variablerna. Denna motivering förefaller oss emellertid utan kraft, när det gäller modeller avsedda för ekonometrisk analys. Simultaniteten i Walras' system har sin grund däri, att systemet är ett statiskt jämviktssystem. Ett sådant uttrycker endast *villkoren* för att ett icke närmare angivet dynamiskt system är i jämvikt, d. v. s. upprepar sig själv oförändrat. Walras' system är sålunda inte vad vi skulle kalla en originär modell. Det ömsesidiga beroendet mellan (de odaterade) variablerna ger i och för sig inte uttryck för att dessa bestämmas samtidigt i tiden. Strängt taget kan de i systemet ingående relationerna vara helt utan relevans för det ekonomiska förloppet under perioder, då jämvikt ej råder.

Det kan naturligtvis inte på förhand avvisas som orimligt att vid ekonometrisk analys arbeta med den hypotesen, att det ekonomiska systemet ständigt befinner sig i jämvikt eller på ett eller annat sätt »hoppas» från det ena jämviktssläget till det andra (moving equilibrium). Det synes dock vara det dynamiska betraktelsesättet, som där är det na-

¹ W. Leontief, »Econometrics». H. S. Ellis (Ed.), *A Survey of Contemporary Economics*, Philadelphia & Toronto 1948.

turliga. Avgörande är emellertid detta, att statiska jämviktssystem aldrig kan bli annat än på sin höjd en *speciell* hypotes och därför ej heller kan användas som *generellt* argument för simultanitet. Det är överhuvudtaget svårt att förstå, hur simultanitet i *statiska* system kan anföras som allmänt argument för simultanitet i *dynamiska* modeller.

C. Låt oss nu övergå till att betrakta det problem, som uppstår genom att vi normalt inte har några empiriska uppgifter om de ekonomiska subjektens förväntningar och planer.

Vi kan utgå från det ekvationssystem, som bildas av ekvationerna (7)—(12) i avsnitt 3 ovan. Detta system är ju rekursivt. Vi förutsätter nu, att en ekonometriker står inför problemet att på grundval av empiriskt material försöka uppskatta parametrarna b_1 och b_2 i ekvationen (8). Hur skall han då bära sig åt?

Eftersom enligt våra förutsättningar inga empiriska uppgifter om plan- och förväntningsvariablerna Y' , C' och I' finns, måste dessa variabler på ett eller annat sätt elimineras ur modellen. I det betraktade systemet kan detta alltid göras genom att i ekvationerna (10), (11) och (12) ersätta nämnda variabler med de uttryck därför, som ges i ekvationerna (7), (8) och (9). Gör vi detta blir resultatet följande system:

$$(13) \quad C_t = b_1^* Y_{t-1} + b_2^* \quad \text{där} \quad b_1^* = a_1 \cdot b_1 \quad \text{och} \quad b_2^* = b_2 + a_2 \cdot b_1$$

$$(14) \quad I_t = c_1 Y_{t-1} + c_2$$

$$(15) \quad Y_t = C_t + I_t$$

Detta system är, som synes, fortfarande rekursivt. Systemet (13)—(15) är tydligen just den rekursiva modell, som användes såsom illustration i avsnitt 1, ekvationerna (1)—(3). Det framgår emellertid, att koefficienterna b_1 och b_2 inte på något ställe förekommer i »ren» form utan endast såsom faktorer i koefficienterna b_1^* och b_2^* . Detta gör, att ett system av typen (13)—(15) lämnar ekonometrikern i en hopplös situation beträffande möjligheterna att bestämma de önskade värdena på b_1 och b_2 . Han kan under vissa villkor bestämma värdena på b_1^* och b_2^* , men detta ger honom inte tillräcklig information för att bestämma de parametrar han enligt förutsättningarna var primärt intresserad av.

Genom att enbart utgå från systemet (13)—(15) har man således ingen möjlighet att bestämma de önskade parametrarna. Finns det då något annat förfaringssätt ekonometrikerna kan använda för att nå sitt mål?

Svaret härpå är, som vi nu skall visa, jakande. En lösning på detta problem ligger just i den möjligheten man har att övergå till ett simultant betraktelsesätt.

Låt oss i det ursprungliga systemet helt enkelt bortse från den första ekvationen, d. v. s. den som anger, hur den förväntade inkomsten bestämmes.¹ I stället skall vi definiera en variabel y_t såsom $Y_t - Y'_t$ och denna, som alltså betecknar skillnaden mellan den realiserade och den förväntade inkomsten, skall betraktas som en restvariabel. Om vi nu i systemet (7)—(12) ersätter ekvationen (7) med $Y_t = Y'_t + y_t$ samt sedan eliminerar alla ex ante-variabler får vi tydligen som resultat följande system²:

$$(16) \quad C_t = b_1 Y_t + b_2 + z_t \quad \text{där} \quad z_t = -b_1 \cdot y_t$$

$$(17) \quad I_t = c_1 Y_{t-1} + c_2$$

$$(18) \quad Y_t = C_t + I_t$$

Det system vi erhållit på detta sätt är tydligen *simultant*. Det är till formen detsamma som den simultana modell, vilken användes såsom illustration i avsnitt 2, ekvationerna (4)—(6). Parametrarna b_1 och b_2 förekommer här i »ren» form och kan under vissa villkor beträffande restvariabelns fördelning empiriskt uppskattas.

Att sist angivna ekvationssystem blivit simultant kan helt tillskrivas det »konstgreppet» att betrakta skillnaden mellan den förväntade och den realiserade inkomsten som en restvariabel.³ I och för sig synes detta förfaringssätt inte innebära något logiskt motsägelsefullt eller otillåtet av andra anledningar. Man kan icke a priori säga, att det skulle ligga något särskilt drastiskt antagande förborgat i behandlingen av y_t som en restvariabel. Huruvida ett sådant förfaringssätt är lämpligt eller ej

¹ Man kan t. ex. ha en känsla av att man har alltför liten aprioristisk kunskap om hur inkomstförväntningen bestämmes för att man skall våga ställa upp en explicit funktion härför samtidigt som man förutsätter, att skillnaden mellan Y_t och Y'_t är förhållandevis liten.

² Vid ekonometriska uppskattningar brukar man alltid tänka sig, att restvariabler förekommer i alla ekvationer, som icke är identiteter. Ur pedagogisk synpunkt har vi här emellertid icke explicit utskrivit andra restvariabler än just den, som kan härledas från det förhållandet, att vi bortsett från den inkomstförväntningsbestämmande ekvationen.

³ Ett analogt förfarande användes av Klein a.a. p. 54. Jfr. även H. Wold a.a. p. 252, övningsexempel 32.

kan dock endast avgöras från fall till fall under hänsyntagande till det konkreta problem man står inför.

Slutsatsen av vad som ovan sagts kan formuleras sålunda: Det förhållandet, att ekonomiska dynamiska modeller stundom är av simultan typ, kan vara en konsekvens av att skillnaderna mellan systemets variabelvärden *ex ante* och *ex post* betraktats såsom restvariabler. Ett sådant betraktelsesätt kan stundom vara nödvändigt att anlägga, för att man över huvud taget skall kunna göra empiriska uppskattningar av de relationer, som gäller mellan *ex ante* variablerna.

D. Vi har nu alltså visat, att bristen på empiriska uppgifter över *ex ante* variablernas värden kan leda till att man inom ekonometrien stundom måste laborera med ekvationssystem av simultan typ. Vi skall nu övergå till att visa, hur simultanitet kan uppstå även av ett annat skäl, nämligen det, att det empiriska material, som står till förfogande, gäller vissa fixerade tidsperioder, som icke alltid kan betraktas som elementarperioder i stockholmsskolans mening.¹ I det följande skall vi nu bortse från den nyss behandlade komplikationen, som uppstår genom distinktionen mellan storheter *ex ante* och *ex post*.

Låt oss utgå från de grundläggande ekvationerna (7)—(12) och tänka oss, att vi gjort de eliminationer, som lett fram till systemet (13)—(15). Detta är ju rekursivt. För enkelhetens skull skall vi här förutsätta, att ekvationen (14) förändras på så sätt, att investeringen bestämmes av en exogen variabel säg *Z*. Vi har då $I_t = F(Z)$. Säg nu, att det rekursiva system man då får gäller för varje enskild elementarperiod, men att vi önskar bestämma de relationer, som gäller mellan konsumtion, inkomst och investering för ett givet tidsintervall, säg ett år, omfattande $n + 1$ stycken elementarperioder. Om vi nu explicit skriver de för varje period gällande ekvationerna, får vi följande schema:

$$\begin{array}{lll}
 C_t = b_1^* Y_{t-1} + b_2^* & I_t = F(Z) & Y_t = C_t + I_t \\
 C_{t+1} = b_1^* Y_t + b_2^* & I_{t+1} = F(Z) & Y_{t+1} = C_{t+1} + I_{t+1} \\
 C_{t+2} = b_1^* Y_{t+1} + b_2^* & I_{t+2} = F(Z) & Y_{t+2} = C_{t+2} + I_{t+2} \\
 \dots & \dots & \dots \\
 C_{t+n} = b_1^* Y_{t+n-1} + b_2^* & I_{t+n} = F(Z) & Y_{t+n} = C_{t+n} + I_{t+n}
 \end{array}$$

¹ Jmfr. R. Bentzel och H. Wold, »On Statistical Demand Analysis from the Viewpoint of Simultaneous Equations», *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 29, p. 110—112.

Vi kan nu lodrätt summera de högra och vänstra leden i dessa ekvationer och får då

$$(19) \quad \sum_{i=0}^n C_{t+i} = b_1^* \sum_0^n Y_{t+i-1} + b_2^* (n+1);$$

$$(20) \quad \sum_0^n I_{t+i} = (n+1) \cdot F(Z);$$

$$(21) \quad \sum_0^n Y_{t+i} = \sum_0^n C_{t+i} + \sum_0^n I_{t+i}.$$

Det är nu tydligt, att $\sum C_{t+i}$ betyder just konsumtionen under hela året, liksom att $\sum Y_{t+i}$ och $\sum I_{t+i}$ betyder hela årets inkomst resp. hela årets investering. Låt oss i tur och ordning beteckna dessa storheter med C_T , Y_T och I_T . Om n är ett stort tal — vilket normalt torde vara fallet (jfr avsnitt 4) — och om systemet inte är explosivt, är $\sum Y_{t+i-1}$ med ringa approximation lika med $\sum Y_{t+i}$ d. v. s. = Y_T .

För att få full kongruens med tidigare här använda ekvationssystem kan vi nu förutsätta, att den investeringsbestämmande variabeln Z just var inkomsten under tidigare år, d. v. s. Y_{T-1} . Denna förutsättning innebär ingen inskränkning av generaliteten i vårt resonemang. Vi kan då på grundval av ekvationerna (19), (20) och (21), skriva de mellan årsdata gällande relationerna på följande sätt

$$(22) \quad C_T = b_1^* Y_T + B_2 \quad \text{där} \quad B_2 = b_2^* \cdot (n+1)$$

$$(23) \quad I_T = f(Y_{T-1}) \quad \text{där} \quad f = (n+1) \cdot F$$

$$(24) \quad Y_T = C_T + I_T.$$

Det system av relationer mellan årsdata, som vi erhållit på detta sätt, är tydligen simultant. Vi är åter tillbaka i den simultana modell, som använts såsom illustration i avsnitt 1. Det är den tidsmässiga aggregationen, som här åstadkommit simultaniteten.

Det inses, att man genom aggregation över tiden kan ledas fram till statistiska system med simultanitet mellan samtliga variabler. Låt oss för att illustrera detta utgå från systemet (7)—(12) och förutsätta, att detta inte är explosivt. Efter en aggregation över n perioder (n stort) och eliminering av plan- och förväntningsvariablerna, erhålles då med god approximation det mot (13)—(15) svarande systemet

$$(25) \quad Y_T = C_T + I_T$$

$$(26) \quad C_T = b_1^* Y_T + n b_2^*$$

$$(27) \quad I_T = c_1 Y_T + n c_2.$$

I detta system förekommer tydligen inga »lags» alls. Systemet är trots detta inte något jämviktssystem i den meningen, att det implicerar likhet mellan förväntade (planerade) och realiserade värden på variablerna. Vi kan här fortfarande ha olikheter mellan den förväntade och den realiserade inkomsten. Inte heller behöver $\Sigma Y'$ och ΣY vara ens approximativt lika. Det bör här observeras, att lösningen till systemet (25)—(27) är just den stationära lösningen till ex post-variablerna i systemet (7)—(12).

E. Det finns slutligen anledning att peka på, att också en annan form av aggregering än den nu diskuterade kan leda till simultanitet. Då nämligen planer och handlande inom varje period är inbördes beroende genom ekvationer av rekursiv karaktär (jfr diskussionen i avsnitt 4 av betingade och obetingade planer), kan inom en period den så vanliga och praktiskt oundvikliga aggregationen över individer eller nyttigheter också leda till att simultanitet uppstår inom enhetsperioden. Antag nämligen, att A har en obetingad plan, B en plan betingad av A:s handlande, C en plan betingad av B:s handlande och D en plan betingad av C:s handlande. Aggregeras nu handlandet över A och C samt över B och D uppstår tydligen ett dubbelsidigt beroendeförhållande mellan de två aggregaten. Detta är i själva verket anledningen till kravet på full specifikation i en originär modell.¹ Det inses också lätt, att även om en sådan aggregation väl oftast är en aggregation över tiden, så behöver detta dock inte nödvändigtvis vara fallet.

6. SLUTSATSER

Av vad som ovan sagts har framgått, att dynamiska ekonomiska modeller enligt vår mening kan vara såväl av rekursiv som av simultan typ. Man torde inte kunna säga, att den ena eller den andra av dessa båda typer äger generell prioritet inom ekonometrien. Den teori, som uttryc-

¹ I vårt grundläggande exempel — ekvationerna (7)—(12) — där vi ju arbetar med storheter, som är aggregerade inom perioden (inkomsten Y , konsumtionen C , etc.), har hänsyn icke tagits till denna omständighet vilket förekommer oss tillåtligt, då det endast avser att vara ett exempel, och vidare aggregation inom perioden icke med nödvändighet leder till simultanitet. När däremot Stockholmskolans teoretiker normalt enbart arbetar med sådana enhetsperiodmodeller och utan vidare tar för givet, att sådana i hög grad aggregerade modeller alltid är av rekursiv karaktär, gör de faktiskt en enligt vår uppfattning oberättigad generalisering. Endast *fullt* specificerade enhetsperiodmodeller är nödvändigtvis rekursiva.

kes i originära modeller, synes visserligen alltid kunna beskrivas med rekursiva ekvationssystem. Det ekonomiska förloppet kan där alltid framställas utan användning av simultana system. När den teori, som man laborerar med, uttryckes i härledda modeller, kan emellertid rekursiviteten icke alltid upprätthållas. Det kan då stundom vara adekvat att framställa det ekonomiska förloppet i form av simultana ekvations-system. Att så blir fallet beror på det statistiska materialets karaktär. Hade man ett fullt idealiskt material, skulle det alltid vara principiellt möjligt att helt undvika simultaniteten och dess följder.

I viss principiell mening kan vi fullständigt hålla med Wold i hans uppfattning, att de rekursiva modellerna är de »naturliga» att arbeta med i ekonomisk analys. Det synes vara en rimlig fordran på den »rena» dynamiska teorien, att det ekonomiska förloppet skall kunna framställas genom en serie successiva samband. När det gäller praktiskt ekonometriskt arbete synes oss dock det simultana betraktelsesättet *stundom* vara både nödvändigt och naturligt. Det statistiska material, som i praktiken föreligger, är ju nästan alltid av en sådan beskaffenhet, att samtliga ovannämnda möjligheter för uppkomst av simultanitet kan förekomma.¹ Vi kan ej helt följa Wolds huvudinvändning mot de simultana modellerna, nämligen att de ej kan tolkas kausalt. Det förefaller oss ofta vara lönlöst att söka efter renodlade kausalsamband i härledda modeller. Även om man fordrar kausalitet i de originära modellerna, ger detta inte anledning till att uppställa samma fordran på de härledda.² Som vi ovan visat är detta inte alltid möjligt. Men givetvis gäller det, att även om en simultan modells olika relationer icke omedelbart ger

¹ För undvikande av missförstånd vill vi här framhålla, att Wold ingalunda är främmande för detta förhållande. Det framgår bl. a. av övningsexempel 30 och 32 p. 251 resp. 252 i hans bok. Enligt vår mening har emellertid Wold i sin diskussion i Part I om rekursiva och simultana system i viss mån negligerat de naturliga konsekvenserna av den tendens till simultanitet han just vill visa med dessa övningsexempel.

² Att såsom Wold gör försöka inlägga en kausal tolkning i definitionsmissiga identiteter synes oss föga lämpligt. Den ekonomiska doktrinhistorien (spec. kvantitetsteorien) rymmer talrika exempel, som varnar mot ett sådant förfaringsätt. Så vitt vi kan se är det inte heller nödvändigt. Den kausala tolkningen av ekvationerna är enl. Wold nödvändig för att man skall kunna avgöra valet mellan regressand och regressor vid uppskattningsförfarandet. När det gäller identiteter existerar emellertid normalt inget uppskattningsproblem och det synes därför icke heller förekomma något tvång till ett sådant val. Att det normalt inget uppskattningsproblem föreligger här, hänger ihop med det faktum, att man brukar se till att det statiska materialet exakt uppfyller alla identiteter; jämför nationalräkenskapsmetodiken.

uttryck för något kausalsamband mellan variablerna, så bör sättet på vilket den simultana modellen är härledd ur en originär ge upplysning om de bakomliggande kausalsambanden. En rimlig fordran på en simultan modell synes därför vara, att den förses med upplysning om hur den är härledd och speciellt på vilket sätt simultaniteten tänkes vara uppkommen. Utan en sådan upplysning synes det vara svårt att acceptera modellen.

Utan att här vilja gå in på det rekursiva och det simultana betraktelsesättets för- eller nackdelar ur rent statistisk synpunkt, kan vi sammanfattande som vår uppfattning säga, att valet mellan rekursiva och simultana modeller i ekonometrien endast kan avgöras från fall till fall och då med hänsyn till den ekonomiska teorien på ifrågavarande område och det statistiska materialets beskaffenhet.